הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
חדו"א 1מ 104018
בוחן סמסטר חורף 03.12.2017

משך הבוחן שעתיים, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
בבוחן שני חלקים. חלק ראשון מורכב משאלות בחירה מרובה וחלק שני משאלות פתוחות.
בחלק השני יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט (לא אדומה)**, על גבי המחברת המצורפת.

בהצלחה

חלק א

שאלה 1 **(8 נקודות)**

תהי: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\le 3\\ e^{2-x}, & 3<x\end{cases}$ אזי:

א. הפונקציה מונוטונית יורדת בקטע $(1,5]$

ב. הפונקציה חד-חד ערכית בקטע $(1,5]$.

ג. הגבול $\lim_{x\to 3} f(x)$ קיים וסופי.

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in(1,5]$ עבורו מתקיים: $f(x_n)>1-1/n$

שאלה 2 **(8 נקודות)**

לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם f חח"ע ו-g על אז $g\circ f$ חח"ע ועל.

ב. אם f חח"ע ועל ו-g על אז $g\circ f$ על.

ג. אם f חח"ע אז היא מונוטונית ממש.

ד. אם f מונוטונית עולה ממש אז היא על.

שאלה 3 **(8 נקודות)**

לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כאשר f זוגית ו-g איזוגית, מתקיים כי

א. $f\circ g$ איזוגית.

ב. $g\circ g$ זוגית.

ג. $f\circ g-g\circ f$ זוגית

ד. $f\circ g-g\circ f$ איזוגית

שאלה 4 **(8 נקודות)**

נתון כי $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$ כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אז

א. יש סביבה שמאלית מנוקבת של 1 בה $f(x)<0$.

ב. $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

ג. $\lim_{x\to 1} f(x)$ אינו קיים.

ד. יש סביבה מנוקבת של 0 בה $f(x)\neq 1$.

שאלה 5 **(8 נקודות)**

לכל $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ אזי $\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$

ב. אם $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ אזי $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{|x|}{x}\right) = 5$

ג. אם $\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = \infty$ אזי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

ד. אם $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

שאלה 6 **(8 נקודות) סמנו נכון\לא נכון ליד כל סעיף. משקל כל סעיף 2 נקודות.**

לכל $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם $\lim_{x\to 0} f(x) = L \le M = \lim_{x\to 0} g(x)$ אז יש סביבה מנוקבת של 0 בה מתקיים $f(x) \le g(x)$.
לא נכון

ב. אם $\lim_{x\to 0} f(x) = L = \lim_{x\to 0} g(x)$ אז יש סביבה מנוקבת של 0 בה מתקיים $f(x) = g(x)$.
לא נכון

ג. אם $\lim_{x\to 0} f(x) = L \le M = \lim_{x\to 0} g(x)$ וגם יש סביבה מנוקבת של 0 בה מתקיים $f(x) > g(x)$ אז $L = M$.
נכון

ד. אם קיימת סביבה שמאלית מנוקבת של 0 בה $f(x) = g(x)$, וגם $\lim_{x\to 0} g(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיימים, אז הגבולות שווים.
נכון

חלק ב

בחלק זה עליכם לרשום פתרונות מלאים ומנומקים

שאלה 1 (25%)

א. (5%) הגדירו $\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+1}=3$.

ב. (20%) הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x+1}=3$.

פתרון. יהי $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-3\right|=\left|\frac{x-1-3(x+1)}{x+1}\right|=\left|\frac{-2x-4}{x+1}\right|=\frac{2|x+2|}{|x+1|}$$

כאשר $0<|x+2|<\delta$ אז

$$-\delta<x+2<\delta$$

ולכן

$$-1-\delta<x+1<-1+\delta$$

ותחת התנאי $\delta\le\frac{1}{2}$ נקבל

$$-\frac{3}{2}\le -1-\delta<x+1<-1+\delta\le -\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\frac{1}{2}\le|x+1|=-(x+1)\le\frac{3}{2}$$

ולכן

$$\frac{1}{|x+1|}\le 2$$

ואז

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-3\right|=\left|\frac{x-1-3(x+1)}{x+1}\right|=\left|\frac{-2x-4}{x+1}\right|=\frac{2|x+2|}{|x+1|}\le 4|x+2|$$

ועבור $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{4}\}$ נקבל שכאשר $0<|x+2|<\delta$ אז

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-3\right|=\left|\frac{x-1-3(x+1)}{x+1}\right|=\left|\frac{-2x-4}{x+1}\right|=\frac{2|x+2|}{|x+1|}\le 4|x+2|<4\delta\le\varepsilon$$

שאלה 2 (27%) מצאו את הגבולות, אם קיימים. בכל מקרה, הסבירו.

א. (9%)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32x^5+4x^6}}{\sqrt{4x^2-3x^3}}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32x^5+4x^6}}{\sqrt{4x^2-3x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^5(32+4x)}}{\sqrt{x^2(4-3x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[5]{32+4x}}{|x|\sqrt{4-3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}\cdot\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}=\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt{4}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}\cdot\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{\sqrt[5]{32+4x}}{\sqrt{4-3x}}=-\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt{4}}$$

ולכן אין גבול.

ב. (9%)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2(2x)}{2xsin(3x)}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2(2x)}{2xsin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{2xsin(3x)\cos^2(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(2x)}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

ג. (9%)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{|x|\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$